1. ESPACIOS VECTORIALES

- ESPACIO VECTORIAL $K\times E \to E$
  - $(E,+)$ Grupo Abeliano $\to$ Asociativa, Elemento Neutro, Conmutativa, Elemento Simétrico
  - $(E,\cdot)$ verifica $\to$ $a\cdot(b\cdot u)=(a\cdot b)\cdot u, \quad \forall u\in E, \forall a,b\in K$
    $(a+b)\cdot u = a\cdot u + b\cdot u, \ \forall u\in E, \forall a,b\in K$
    $a\cdot(u+v) = a\cdot u + a\cdot v, \ \forall u,v\in E, \forall a\in K$
  - + Todo cuerpo K es espacio vectorial sobre sí mismo.
  - + El conjunto ÷ es espacio vectorial sobre ú.
  - + $ú^2$, $ú^3$, ..., $ú^n$, son espacios vectoriales sobre ú.
  - + El conjunto $P_n(x)$ con coeficientes en K, es espacio vectorial sobre K con las operaciones suma de polinomios y producto de un polinomio por un $a\in K$.
- SUBESPACIO VECTORIAL:

  Es un subconjunto S de E que verifica

$$\left.\begin{array}{l}\forall \vec{u},\vec{v}\in S; \quad \vec{u}+\vec{v}\in S \\ \forall a\in K, \forall \vec{u}\in S; \quad a\cdot\vec{u}\in S\end{array}\right] \Rightarrow a\cdot\vec{u}+b\cdot\vec{v}\in S$$

- SISTEMA DE VECTORES: Cualquier subconjunto finito de los vectores de E.
- COMBINACIÓ N LINEAL DE VECTORES: $\vec{u}$ será una combinación lineal de los vectores de E $\vec{u_1},\vec{u_2},\ldots,\vec{u_n}$ si $\vec{u}=a_1\cdot\vec{u_1}+a_2\cdot\vec{u_2}+\ldots+a_n\cdot\vec{u_n}$ con $a_i\in K$
- VARIEDAD LINEAL VECTORIAL: $L(F)$ será una variedad lineal generada por F de los vectores combinación lineal de un sistema de F. Este conjunto será un subespacio vectorial de E.

$$F=\{\vec{u_1},\vec{u_2},\ldots,\vec{u_n}\}\Rightarrow L(F)=\{a_1\cdot\vec{u_1}+a_2\cdot\vec{u_2}+\ldots+a_n\cdot\vec{u_n}, \quad \forall a_i\in K\}$$

- SISTEMA DE VECTORES LIBRES: $F=\{\vec{u_1},\vec{u_2},\ldots,\vec{u_n}\}$ es un sistema libre o linealmente independiente, si $a_1\cdot\vec{u_1}+a_2\cdot\vec{u_2}+\ldots+a_n\cdot\vec{u_n}=0\Rightarrow a_1=a_2=\ldots=a_n=0$.
- SISTEMA DE VECTORES LIGADOS: $F=\{\vec{u_1},\vec{u_2},\ldots,\vec{u_n}\}$ es un sistema ligado o linealmente dependiente, si existe un $\vec{u_i}\in F / \vec{u_i}=l_1\cdot\vec{u_1}+\ldots+l_{i-1}\cdot\vec{u_{i-1}}+l_{i+1}\cdot\vec{u_{i+1}}+\ldots+l_n\cdot\vec{u_n}$ o sea si algún vector $\vec{u_i}$ es combinación lineal de los demás vectores de F.
- SISTEMA DE GENERADORES: Dado un subespacio vectorial S, se dice que el sistema F de vectores genera, o es un sistema de generadores de S si $L(F)=S$.
- SISTEMAS EQUIVALENTES: Dos sistemas F_1 y F_2 son equivalentes si generan el mismo espacio vectorial. Es decir $L(F_1)=L(F_2)$.

  Si a un sistema F se le añade un vector combinación lineal de los vectores de F, el nuevo sistema es equivalente al anterior.

  Si a F, sistema ligado, se le elimina el vector que es combinación lineal de los restantes, el sistema obtenido también es equivalente a F.
- BASE DE UN ESPACIO VECTORIAL: Todo sistema libre de generadores.
- TEOREMA DE LA BASE: En todo espacio vectorial existe al menos una base. En un espacio vectorial todas las bases tienen el mismo número de vectores.

- COORDENADAS DE $\vec{u}$ EN LA BASE B: Si la base $B=\{\vec{e_1},\vec{e_2},\ldots,\vec{e_n}\}$, las coordenadas de un vector $\vec{u}$ en esa base serán los escalares a_1, a_2, ..., a_n, tal que $\vec{u}=a_1\cdot\vec{e_1}+a_2\cdot\vec{e_2}+\ldots+a_n\cdot\vec{e_n}$.

  Las coordenadas de $\vec{u}$ son únicas en esa base.
- DIMENSIÓN DE UN ESPACIO VECTORIAL: Número de vectores de una cualquiera de sus bases.
- SUMA DE SUBESPACIOS VECTORIALES: Si S_1 y S_2 son subespacios vectoriales de $E(K)$

$$S_1+S_2=\{\vec{x}=\vec{u}+\vec{v};\quad \forall\vec{u}\in S_1,\forall\vec{v}\in S_2\}$$

  Verifica: -- S_1+S_2 es un subespacio vectorial de E.

  -- Si F_1 y F_2 son sistemas de E tales que $S_1=L(F_1)$ y $S_2=L(F_2)\Rightarrow S_1+S_2=L(F_1\cup F_2)$.

  -- Si $S_1+S_2=S$ entonces $\forall\vec{x}\in S$, $\vec{x}$ se puede descomponer como suma de un vector de S_1 y otro vector de S_2.
- INTERSECCIÓN DE SUBESPACIOS VECTORIALES: Si S_1 y S_2 son subespacios vectoriales de E entonces $S_1\cap S_2$ también es subespacio vectorial.
- RELACIÓN ENTRE DIMENSIONES DE LOS SUBESPACIOS SUMA E INTERSECCIÓN

$$\dim(S_1+S_2)+\dim(S_1\cap S_2)=\dim(S_1)+\dim(S_2)$$

- SUMA DIRECTA. ESPACIOS SUPLEMENTARIOS

  - Si $S=S_1+S_2$ siendo $S_1\cap S_2=\{\vec{0}\}$, entonces S_1 y S_2 se llaman suplementarios.
  - Si $E=S_1\oplus S_2$ entonces cualquier vector de E se puede descomponer de manera única, como suma de un vector de S_1 y otro vector de S_2.
- RANGO DE UN SISTEMA DE VECTORES: Es la dimensión del subespacio S generado por F. Se denota por rg(F).
- TEOREMA DE LA BASE INCOMPLETA: Si E es un espacio vectorial de dimensión n y F es un sistema libre de E, n-rg(F) es el número de vectores que faltan a F para ser base.

2. MATRICES

- TIPOS PARTICULARES DE MATRICES:
  a) Matriz Regular: su determinante es distinto de cero.
  b) Matriz Singular: su determinante es igual a cero.
  c) Matriz Rectangular: $m \neq n$ (n ºfilas ≠ n ºcolumnas).
  d) Matriz Cuadrada: $m = n$ (n ºfilas = n ºcolumnas).
  e) Matriz Fila: orden $(1,n)$.
  f) Matriz Columna: orden $(m,1)$.
  g) Matriz Opuesta $(-A)$: matriz de los elementos opuestos.
  h) Matriz Transpuesta (A^t): elementos de filas y columnas intercambiados.
  i) Matriz Opuesta (0): todos sus elementos son cero.
  j) Matriz Diagonal: todos los elementos son cero excepto los de la diagonal.
     - Matriz Escalar: elementos de la diagonal iguales.
     - Matriz Unidad (I): elementos de la diagonal iguales a 1.
  k) Matriz Simétrica: matriz cuadrada que coincide con su transpuesta.
  l) Matriz Antisimétrica o Hemisimétrica: matriz cuadrada que coincide con la opuesta de su transpuesta. Los elementos de la diagonal son ceros y los elementos situados encima son opuestos a sus simétricos respecto a la diagonal.
  m) Matriz Adjunta $(\overline{A})$: cada elemento es substituido por el valor de su adjunto.
  n) Matriz Inversa (A^{-1}): al multiplicar una matriz por su inversa se obtiene la matriz unidad.
  o) Matriz Triangular Superior: tiene ceros por debajo de la diagonal principal (la que va de arriba a abajo y de izquierda a derecha).
- SUMA DE MATRICES: Se suman los elementos que ocupan el mismo lugar.

$$(M_{m,n}, +) \text{ es un grupo abeliano}$$

- PRODUCTO DE UN ELEMENTO DE K POR UNA MATRIZ: Se multiplica el escalar $a \in K$ por cada elemento de la matriz en el mismo lugar.

$$(M_{m,n}, +, \cdot) \text{ es un espacio vectorial}$$

- BASE CANÓNICA: Conjunto de matrices con un 1 en un elemento y cero en los restantes.

$$M_{2,3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

  La dimensión de $M_{m,n}(K)$ será $m \cdot n$.
- PRODUCTO DE MATRICES: $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}$

  El número de columnas de la primera matriz debe coincidir con el de filas de la segunda matriz.

  La estructura $(M_n, +, \cdot)$ es un Anillo Unitario.
- MATRICES INVERSIBLES O REGULARES: En el anillo $(M_n, +, \cdot)$ tiene elemento inverso.

$$A \text{ regular} \Leftrightarrow \exists A^{-1} \in M_n \,/\, A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

  El conjunto de matrices regulares de orden n $(MR_n, +, \cdot)$ tiene estructura de Cuerpo.

- CAMBIO DE BASE EN UN ESPACIO VECTORIAL:

$$B_1 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}, \quad B_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{l} \vec{v}_1 = a_{11}\cdot\vec{e}_1 + a_{12}\cdot\vec{e}_2 + \ldots + a_{1n}\cdot\vec{e}_n \\ \vec{v}_2 = a_{21}\cdot\vec{e}_1 + a_{22}\cdot\vec{e}_2 + \ldots + a_{2n}\cdot\vec{e}_n \\ \vdots \\ \vec{v}_n = a_{n1}\cdot\vec{e}_1 + a_{n2}\cdot\vec{e}_2 + \ldots + a_{nn}\cdot\vec{e}_n \end{array}$$

Un vector $\vec{u}$ con coordenadas (x_1, x_2, …, x_n) en B_1 y coordenadas (y_1, y_2, … , y_n) en B_2.

Tenemos que $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Rightarrow U_{B_1} = M_{B_2,B_1} \cdot U_{B_2}$

Siendo M_{B_2,B_1} la matriz de paso.

Cambiando el orden tendremos $U_{B_2} = M_{B_1,B_2} \cdot U_{B_1}$ y la matriz de paso será M_{B_1,B_2}.

- RANGO DE UNA MATRIZ: Número de vectores fila o columna linealmente independientes.
- OPERACIONES ELEMENTALES EN UNA MATRIZ:
  a) Permutar dos vectores.
  b) Sustituir un vector por el mismo más una combinación lineal de los restantes.
  c) Multiplicar un de los vectores por un escalar.
- MÉTODOS DE CÁLCULO DEL RANGO DE UNA MATRIZ:
  a) Buscando el máximo número de filas (o columnas) linealmente independientes.
  b) Mediante operaciones elementales en las filas (o columnas) eligiendo un 1 en la matriz y haciendo cero los elementos de su misma fila (o columna).
  c) Mediante determinantes.
- CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA:
  1) Se parte de la matriz (A).
  2) Se construye la matriz $(A \vdots I)$.
  3) Mediante transformaciones en sus filas se llega a la matriz $(I \vdots B)$.
  4) B es la matriz inversa de $A \rightarrow B = A^{-1}$
- PROPIEDADES DE LAS MATRICES INVERSA Y TRANSPUESTA:
  a) $(A+B)^t = A^t + B^t$
  b) $(A\cdot B)^t = B^t \cdot A^t$
  c) $(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$
  d) $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

3. DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA

- DETERMINANTE DE UNA MATRIZ UNIDAD: Es siempre el elemento unidad del cuerpo al que pertenecen los elementos de la matriz. $|I| = 1$.
- DETERMINANTE DE UNA MATRIZ DIAGONAL: Es el producto de los elementos de la diagonal.
- DETERMINANTE DE UNA MATRIZ TRIANGULAR: Es el producto de los elementos de la diagonal.
- PROPIEDADES:
  a) $|A| = |A^t|$
  b) Si se permutan entre si dos líneas paralelas el determinante cambia de signo.
  c) Si en una línea se multiplican todos los elementos por a, el determinante queda multiplicado por a.
  d) Si en una matriz se expresa una de sus líneas como suma de dos nuevas, el determinante es igual a la suma de dos determinantes que se obtienen de sustituir la línea por cada una de las líneas sumandos.
  e) El determinante de una matriz cuadrada es nulo si y sólo si
     - existe una línea de ceros.
     - una línea es combinación lineal de otras paralelas.
  f) Si se sustituye una línea por una combinación lineal de ella misma más otras paralelas, el valor del determinante no cambia.
- MENOR COMPLEMENTARIO del elemento a_{ij} de la matriz A de orden n, es el determinante de la matriz n-1 que resulta de eliminar en A la fila i y la columna j, sin alterar las demás. Se designa Δ_{ij}.
- ADJUNTO del elemento a_{ij} (A_{ij}):
  - el menor complementario si $i+j$ es par.
  - el menor complementario cambiado de signo si $i+j$ es impar.
- CÁLCULO PRÁCTICO DE DETERMINANTES:
  a) Transformándolo en un determinante conocido (diagonal, triangular, etc.) aplicando las propiedades de los determinantes.
  b) Desarrollando por los elementos de una fila: el determinante de una matriz A es igual a los elementos de una línea por sus adjuntos:

$$|A| = a_{1j}\cdot A_{1j} + a_{2j}\cdot A_{2j} + \ldots + a_{nj}\cdot A_{nj}$$

- CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot\left(\overline{A}\right)^t$$

- RANGO DE UNA MATRIZ: Es el mayor de los órdenes de sus Menores no nulos.
- DETERMINANTE DE LA MATRIZ PRODUCTO DE OTRAS DOS:

$$|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$$

Consecuencia: ya que $|A| = |A^t| \Rightarrow |A\cdot B| = |A|\cdot|B| = |A^t|\cdot|B^t| = |A^t\cdot B^t|$

4. APLICACIONES LINEALES

- APLICACIÓN LINEAL U HOMOMORFISMO: Una aplicación f: $E \to F$, donde E y F son dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo, y donde para cualquier par de vectores $\vec{u}, \vec{v} \in E$ y todo escalar $a \in K$ se verifica:

$$f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$$
$$f(a \cdot \vec{u}) = a \cdot f(\vec{u})$$

  Equivale a $f(a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v}) = a \cdot f(\vec{u}) + b \cdot f(\vec{v})$

- TIPOS DE APLICACIONES LINEALES:
  a) Si f biyectiva, la aplicación lineal es un isomorfismo.
  b) Si f: $E \to E$, la aplicación se denomina endomorfismo.
  c) Si f no es inyectiva ni sobreyectiva, se dice aplicación en.
  d) El endomorfismo biyectivo se llama automorfismo.
  e) f: $E(K) \to K$ se llama forma lineal.

- PRINCIPALES PROPIEDADES: Si f: $E \to F$ es una aplicación lineal, se verifica:
  a) $f(\vec{0}) = \vec{0}$.
  b) $\forall \vec{u} \in E; \quad f(-\vec{u}) = -f(\vec{u})$.
  c) $S \subset E$, S subespacio vectorial de $E \Rightarrow f(S)$ subespacio vectorial de F.
  d) Si $L = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_n}\}$ sistema de generadores de E, entonces $f(L) = \{f(\vec{u_1}), f(\vec{u_2}), ..., f(\vec{u_n})\}$ es un sistema de generadores de $f(E)$.
  e) Si $L = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_n}\}$ sistema ligado de E, entonces $f(L) = \{f(\vec{u_1}), f(\vec{u_2}), ..., f(\vec{u_n})\}$ es un sistema ligado de $f(E)$.

- IMAGEN DE UNA APLICACIÓN LINEAL: Dada una aplicación lineal f: $E \to F$, el conjunto $f(E) \subset F$ que es también espacio vectorial, se llama imagen de f. Se denota $\text{Im}(f) = f(E)$.

  La aplicación lineal f: $E \to F$ será sobreyectiva si $f(E) = F$.

- NÚCLEO DE UNA APLICACIÓN LINEAL: Dada una aplicación lineal f: $E \to F$, se llama Núcleo de f, y se denota $K_{er}(f)$ o bien $N(f)$, el conjunto de vectores de E que se aplican en el vector nulo de F. Es decir, es la imagen inversa del vector nulo de F.

$$K_{er}(f) = N(f) = K_{er}(f) = N(f) = \{\vec{x} \in E, \text{ tal que } f(\vec{x}) = \vec{0}\} = f^{-1}(\vec{0})$$

  $N(f)$ es subespacio vectorial de E, y se verifica:

$$\dim(N(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(E)$$

- DETERMINACIÓN DE UNA APLICACIÓN LINEAL. MATRIZ: Una aplicación lineal queda determinada conociendo $f(\vec{e_1}), f(\vec{e_2}), \ldots, f(\vec{e_n})$, o sea, conociendo las imágenes por f de los vectores de la base de E.

  Si $\vec{u} \in E$ tiene de coordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en la base B de E y su imagen $f(\vec{u})$ tiene de coordenadas $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ en la base B' de F.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow Y = A \cdot X$$

Las columnas de A son las coordenadas de los vectores $f(\vec{e_1}), f(\vec{e_2}), \ldots, f(\vec{e_n})$ en la base B':

Así $f(\vec{e_1}) = (a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1m})$ en la base B':

Expresión matricial de f en las bases B y B': $\boxed{Y_{B'} = M_{(f,B,B')} \cdot X_B}$

- RANGO DE UNA APLICACIÓN LINEAL $f: E \to F$: La dimensión del espacio vectorial imagen. Se denota rg(f).

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)) = \dim(f(E))$$

Además el rg(f) coincide con el rango de la matriz asociada a f en cualquier base:

$$\text{rg}(f) = \text{rg}(M_f)$$

- APLICACIONES LINEALES INYECTIVAS: $\Leftrightarrow K_{er}(f) = \{\vec{0}\}$

$$f \text{ inyectiva} \Leftrightarrow [B \text{ base de } E \Rightarrow f(B) \text{ base de } f(E)]$$

$$\dim(E) = \dim(f(E))$$

$$\text{rg}(M_f) = \dim(E)$$

- ENDOMORFISMOS BIYECTIVOS: AUTOMORFISMOS

$$f: E \to E \text{ biyectivo} \Leftrightarrow |M_f| \neq 0$$

- CONJUNTO DE LAS APLICACIONES LINEALES ENTRE E Y $F \to L(E,F)$:

$\forall \vec{u} \in E \quad (f+g)\vec{u} = f(\vec{u}) + g(\vec{u})$

$\forall \vec{u} \in E \quad (a \cdot f)\vec{u} = a \cdot f(\vec{u})$

El conjunto $L(E,F)$ con las operaciones suma y producto por un escalar es un K-espacio vectorial.

- EL ANILLO $L(E)$ DE LOS ENDOMORFISMOS EN E: En el conjunto $L(E,F)$ de las aplicaciones lineales sobre E, además de las operaciones suma y producto por un escalar, es posible definir otra operación interna, el producto, que será la propia composición de aplicaciones.

El conjunto $(L(E), +, \cdot)$ es anillo unitario.

- MATRICES ASOCIADAS A UN ENDOMORFISMO EN DOS BASES DISTINTAS:

Sean $B_1 = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n}\}$ y $B_2 = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$ dos bases de E donde los vectores de B_2 en B_1 son:

$$\vec{v_1} = a_{11} \cdot \vec{e_1} + a_{12} \cdot \vec{e_2} + \ldots + a_{1n} \cdot \vec{e_n}$$
$$\vdots$$
$$\vec{v_n} = a_{n1} \cdot \vec{e_1} + a_{n2} \cdot \vec{e_2} + \ldots + a_{nn} \cdot \vec{e_n}$$

Sea la aplicación lineal $f: E \to E$ de matrices $M_{(f,B_1)}$ y $M_{(f,B_2)}$ en las bases B_1 y B_2.

La relación existente entre ambas matrices es

$$\boxed{M_{(f,B_2)} = C^{-1} \cdot M_{(f,B_1)} \cdot C}$$

donde C es la matriz de cambio de base $M_{(B_2,B_1)}$: matriz que tiene por columnas las coordenadas de los vectores de B_2 expresados en B_1.

Recordando que $M_{(B_2,B_1)} = M^{-1}_{(B_1,B_2)}$ tenemos que

$$\boxed{M_{(f,B_2)} = M_{(B_1,B_2)} \cdot M_{(f,B_1)} \cdot M^{-1}_{(B_1,B_2)}}$$

5. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Un sistema de ecuaciones lineales puede expresarse en forma matricial:

$$A\cdot X = B \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

matriz de los coeficientes de las incógnitas — matriz de las incógnitas — matriz de los términos independientes

Se puede interpretar como la expresión de una aplicación lineal f: $E \to F$ de matriz A de forma que la búsqueda de soluciones equivale a hallar vectores $\vec{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E$ que se aplican sobre el vector $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m) \in F$.

- TIPOS DE SISTEMAS:
  a) Sistema Incompatible: el vector $\vec{b} \notin \text{Im}(f)$. No existen $\vec{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) / f(\vec{u}) = \vec{b}$.
  b) Sistema Compatible: $\exists\ \vec{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) / f(\vec{u}) = \vec{b} \in \text{Im}(f)$.
     - Determinado: $\exists$ un solo $\vec{u} / f(\vec{u}) = \vec{b} \in \text{Im}(f)$.
     - Indeterminado: $\exists$ infinitos $\vec{u} / f(\vec{u}) = \vec{b} \in \text{Im}(f)$.

  Sistemas Equivalentes: tienen las mismas soluciones
- TEOREMA DE ROUCHÉ-FROBENIUS:

$$A\cdot X = B \text{ compatible} \Leftrightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A \vdots B)$$

  - Si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A \vdots B) =$ nº de incógnitas $\rightarrow$ sistema compatible determinado.
  - Si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A \vdots B) <$ nº de incógnitas $\rightarrow$ sistema compatible indeterminado.
- SISTEMA DE CRAMER: Dado $A\cdot X = B$ con A regular, su solución única es $x_i = \dfrac{|A_i|}{|A|}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, donde A_i es la matriz que resulta de substituir en la matriz A la columna i por la matriz columna B de los términos independientes.
- MÉTODO DE GAUSS: Se aplican a la matriz ampliada $A \vdots B$ transformaciones elementales de las filas hasta conseguir una matriz A triangular, cuyo sistema asociado es fácilmente resoluble.
- ECUACIONES PARAMÉTRICAS E IMPLÍCITAS DE UN SUBESPACIO VECTORIAL: El conjunto de soluciones de un sistema homogéneo ($A\cdot X = 0$) es un subespacio vectorial. Las ecuaciones de dicho sistema se llaman ecuaciones implícitas o cartesianas del subespacio solución.

  Si hay infinitas soluciones, esas soluciones en función de los parámetros correspondientes se llaman ecuaciones paramétricas del subespacio vectorial.
  - Número de parámetros en $A\cdot X = 0$: nº de incógnitas $-\text{rg}(A)$.
  - Dimensión del subespacio: nº de incógnitas $-$ nº de ecuaciones independientes.

  + Paso de implícitas ($A\cdot X = 0$) a paramétricas: Se halla el $\text{rg}(A)$ (es el nº de ecuaciones independientes) y se resuelve el sistema: esa solución en función de parámetros serán las paramétricas.
  + Paso de paramétricas a implícitas ($A\cdot X = 0$): Se eliminan los parámetros hasta obtener un nº de ecuaciones independientes igual al nº de incógnitas $-$ nº de parámetros.

6. VARIEDADES LINEALES VECTORIALES

- VARIEDAD LINEAL: Subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ (V_n, $n \geq 2$)

  Dado en V_2 un subespacio $L \subset V_2$:

  + $\dim(L) = 0 \Rightarrow L = \{\vec{0}\}$
  + $\dim(L) = 1 \Rightarrow L$ es una recta vectorial del plano V_2.

  En V_3 un subespacio $L \subset V_3$:

  + $\dim(L) = 0 \Rightarrow L = \{\vec{0}\}$
  + $\dim(L) = 1 \Rightarrow L$ es una recta vectorial del espacio V_3.
  + $\dim(L) = 2 \Rightarrow L$ es una plano vectorial del espacio V_3.

- HIPERPLANO: Variedad Lineal $L \subset V_n$ / $\dim(L) = n - 1$.

- TEOREMA: El conjunto de soluciones de un sistema homogéneo con n incógnitas es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, cuya dimensión es n −rg(matriz coeficientes).

  El número de parámetros coincide con la dimensión del subespacio vectorial.

- MÉTODOS DE ELIMINACIÓN DE PARÁMETROS:

  a) Método Matricial

  De la forma matricial

$$A \cdot \vec{l} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \vec{X}$$

  donde A es la matriz de los coeficientes de los parámetros.

  Se tiene que el rango de A y el de $A \vdots X$ tienen que coincidir.

  b) Método de Igualación

  c) Método de Sustitución

  d) Método de Reducción

7. DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES

7.1 DEFINICIONES PRELIMINARES

Dadas dos matrices A y B del conjunto $M_{m\times n}$ son equivalentes si existen dos matrices regulares M y N tales que $A = M\cdot B\cdot N$.

Si A y B son equivalentes, entonces los rangos de ambas matrices coinciden.

Dadas dos matrices cuadradas de orden n, A y B, se dice que son congruentes si existe una matriz regular P tal que

$$A = P\cdot B\cdot P^t \text{ ó } A = P^t\cdot B\cdot P$$

De la definición se deducen tres proposiciones importantes:

1. Si A y B son congruentes, entonces A y B son equivalentes.
2. Si A y B son congruentes entonces $rg(A) = rg(B)$.
3. La congruencia de matrices es una relación de equivalencia (simétrica, reflexiva y transitiva).

Dadas dos matrices cuadradas de orden n, A y B, se dice que son semejantes si existe una matriz regular P tal que

$$A = P\cdot B\cdot P^{-1}$$

A la matriz P se le llama matriz de paso.

De esta definición se deducen cinco proposiciones importantes:

1. Si A y B son semejantes, entonces A y B son equivalentes.
2. Si A y B son semejantes, entonces $rg(A) = rg(B)$.
3. La semejanza de matrices es una relación de equivalencia (simétrica, reflexiva y transitiva).
4. Si $A = P\cdot B\cdot P^{-1}$, entonces $A^h = P\cdot B^h\cdot P^{-1}$.
5. La matriz suma de matrices semejantes es semejante (si tienen la misma matriz de paso).

7.2 VECTORES Y VALORES PROPIOS

Sea A una matriz cuadrada de orden n, se llama vector propio o autovector a todo vector $\vec{u}$ no nulo tal que $A\cdot\vec{u} = l\cdot\vec{u}$.

De la misma manera, llamamos valor propio o autovalor a todo escalar l tal que existe $\vec{u}\neq\vec{0}$ que verifica: $A\cdot\vec{u} = l\cdot\vec{u}$.

7.3 ECUACIÓN CARACTERÍSTICA

Para una matriz cuadrada A, los vectores propios asociados al valor propio l, son las soluciones de la ecuación matricial,

$$\boxed{(A - l\cdot I)\cdot X = 0}$$

La ecuación $|A - l\cdot I| = 0$ se llama ecuación característica de A, sus soluciones son los autovalores de A. El polinomio en l; $|A - l\cdot I|$ se llama polinomio característico de A.

De lo dicho se deducen cinco proposiciones importantes:

1. Si A y B son semejantes, entonces $|A| = |B|$.
2. Si A y B son semejantes, también lo son A^n y B^n.
3. Las matrices asociadas a un endomorfismo en diferentes bases, son semejantes.
4. Si A y B son semejantes, entonces A y B tienen la misma ecuación característica y, con ello, los mismos autovalores con el mismo orden de multiplicidad.
5. Dados dos autovalores de una misma matriz simétrica le corresponden vectores propios ortogonales.

Ejemplo 7.1:

Consideremos la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |A-\lambda\cdot I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$=(3-\lambda)\cdot[(2-\lambda)\cdot(3-\lambda)-1]-(-1)\cdot(3-\lambda)=(-3+\lambda)\cdot(6-2\lambda-3\lambda+\lambda^2-1)-3+\lambda=$$

$$=-\lambda^3+8\lambda^2-19\lambda+12=(\lambda-1)\cdot(\lambda-3)\cdot(\lambda-4)$$

cuyos autovalores son $\lambda_1=1$, $\lambda_2=3$, y $\lambda_3=4$.

Para $\lambda=1$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2u_1-u_2=0 \\ -u_1+u_2-u_3=0 \\ -u_2+2u_3=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{r} 2u_1-u_2=0 \\ -u_2+2u_3=0 \end{array}\begin{cases} u_1=d \\ u_2=2d \\ u_3=d \end{cases},\quad \forall d\in \mathrm{R}$$

y su conjunto de vectores será $L_1=\{(d, 2d, d), \forall d \in \text{ú}\}$. Base de $L_1=(1,2,1)$

Para $\lambda=3$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow \left.\begin{array}{r} -u_2=0 \\ -u_1-u_2-u_3=0 \\ -u_2=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{r} u_2=0 \\ u_1=-u_3 \end{array}\begin{cases} u_1=y \\ u_2=0 \\ u_3=-y \end{cases},\quad \forall y\in \mathrm{R}$$

y su conjunto de vectores será $L_3=\{(y, 0, -y), \forall y \in \text{ú}\}$. Base de $L_3=(1,0,-1)$

Para $\lambda=4$:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow \left.\begin{array}{r} -u_1-u_2=0 \\ -u_1-2u_2-u_3=0 \\ -u_2-u_3=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{r} -u_1-u_2=0 \\ -u_2-u_3=0 \end{array}\begin{cases} u_1=f \\ u_2=-f \\ u_3=f \end{cases},\quad \forall f\in \mathrm{R}$$

y su conjunto de vectores será $L_4=\{(f, -f, f), \forall f \in \text{ú}\}$. Base de $L_4=(1,-1,1)$

7.4 SUBESPACIO PROPIO

Para cada autovalor λ de A, el conjunto X de autovectores asociado se obtiene resolviendo el sistema resultante de la ecuación $(A-\lambda\cdot I)\cdot X=0$. Para cada λ ese conjunto es un subespacio vectorial que se llama subespacio propio asociado a λ. Se denota L_λ, y su dimensión es:

$$\dim(L_\lambda)=n\text{-rg}(A-\lambda\cdot I)$$

donde n = orden de A.

A la dimensión de L_l le denominaremos multiplicidad geométrica de l_i y la notaremos por m_i (representa los vectores linealmente independientes asociados a l_i).

Dada una matriz *A* con *n* autovalores distintos entonces el conjunto de vectores propios asociados a cada valor propio constituyen una base del espacio vectorial.

Diremos que un autovalor l_i es simple si $a_i = m_i$, es decir, si su multiplicidad algebraica coincide con la geométrica que es precisamente la dimensión del subespacio vectorial engendrado por l_i.

7.5 DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES

Diremos que una matriz *A* es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal Λ o dicho de otro modo, si existe una matriz regular *P*, de paso, tal que $A = P \cdot \Lambda \cdot P^{-1}$.

Al proceso de búsqueda de las matrices Λ y *P* dada una matriz *A* se llama diagonalización de *A*.

7.5.1 Teorema de caracterización de matrices diagonalizables

Una matriz *A* de orden *n*, con números reales, es diagonalizable si, y sólo si, admite *n* vectores propios linealmente independientes. Esto sucede cuando:

1) La ecuación de multiplicidad tiene *n* raíces reales (iguales o no).

2) El orden de multiplicidad de cada autovalor en la ecuación característica coincide con la dimensión del subespacio propio asociado.

TEOREMA: Sea *A* una matriz de orden *n* con elementos reales, si todos los valores propios $l_1, l_2, \ldots, l_n$ son reales y distintos entonces *A* es diagonalizable, es decir *A* es semejante a una matriz diagonal Λ, o dicho de otro modo, existe una matriz *P* de paso tal que $A = P \cdot \Lambda \cdot P^{-1}$ siendo Λ la matriz diagonal.

Ejemplo 7.2:

Consideremos la matriz del ejemplo anterior:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Procediendo como indica el teorema anterior y vistos los espacios vectoriales asociados L_1, L_3, y L_4 podemos elegir en cada uno de ellos unos vectores columna. Consideremos en L_i, el vector que se obtiene

$$\text{para } d = 1, \text{ será } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ para } y = 1, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ y para } f = 1, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz *P*, de paso, será: $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

y la matriz diagonal será: $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Si calculamos P^{-1} resultará:

$$\overline{P}=\begin{pmatrix}-1 & -3 & -2\\ -2 & 0 & 2\\ -1 & 3 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow \overline{P}^t=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -1\\ -3 & 0 & 3\\ -2 & 2 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow P^{-1}=\frac{1}{|P|}\cdot\overline{P}^t=\frac{1}{-6}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -2 & -1\\ -3 & 0 & 3\\ -2 & 2 & -2\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1/6 & 1/3 & 1/6\\ 1/2 & 0 & -1/2\\ 1/3 & -1/3 & 1/3\end{pmatrix}$$

Fácilmente se puede comprobar que:

$$A=P\cdot\Lambda\cdot P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1/6 & 1/3 & 1/6\\ 1/2 & 0 & -1/2\\ 1/3 & -1/3 & 1/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}=A$$

TEOREMA: Sea *A* una matriz cuadrada, diremos que *A* es diagonalizable si, y sólo si, la dimensión del subespacio vectorial asociado a cada autovalor es igual al grado de multiplicidad algebraica de dicho autovalor.

Ejemplo 7.3:

Veamos la matriz *A*:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow |A-\lambda\cdot I|=\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & -1\\ -1 & 2-\lambda & -1\\ 1 & -1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=-\lambda\cdot(4-2\lambda-2\lambda+\lambda^2-1)-(-2+\lambda+1)-(1-2+\lambda)=$$

$$=-4\lambda+2\lambda^2+2\lambda^2-\lambda^3+\lambda+2-\lambda-1-1+2-\lambda=-\lambda^3+4\lambda^2-5\lambda+2=(\lambda-1)^2\cdot(\lambda-2)$$

cuyos autovalores son $\lambda_1=1$ (doble) y $\lambda_2=2$.

Para $\lambda=1$

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{aligned}-u_1+u_2-u_3=0\\ -u_1+u_2-u_3=0\\ u_1-u_2+u_3=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow u_2=u_1+u_3$$

de donde el subespacio vectorial asociado es:

$L_1=\{(\delta,\delta+\gamma,\gamma),\ \forall\delta,\gamma\in\mathbb{R}\}$. Base de $L_1=\{(1,1,0),(0,1,1)\}$

Como la dimensión de L_1 es dos entonces $m_1=2$ y, por tanto, $\lambda_1=1$ es un autovalor simple.

Para $\lambda=2$

$$\begin{pmatrix}-2 & 1 & -1\\ -1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{aligned}-2u_1+u_2-u_3=0\\ -u_1-u_3=0\\ u_1-u_2=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{aligned}-u_1-u_3=0\\ u_1-u_2=0\end{aligned}\begin{cases}u_1=\varphi\\ u_2=\varphi\\ u_3=-\varphi\end{cases},\quad\forall\varphi\in\mathrm{R}$$

y $L_2=\{(\varphi,\varphi,-\varphi),\ \forall\varphi\in\mathbb{R}\}$, luego la dimensión de L_2 es uno y entonces $m_2=1$ por lo cual λ_2 también es un autovalor simple.

Base de $L_2 = (1,1,-1)$

Ya que todos los autovalores son simples [coincide su multiplicidad algebraica (número de raíces del autovalor) con la geométrica (dimensión de L_I)], A es diagonalizable.

Para el cálculo de la matriz P, de paso, recordemos que se toman para cada autovalor una base de su subespacio propio:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

y la matriz diagonal será:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Si calculamos P^{-1} resultará:

$$\overline{P} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{P}^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{|P|} \cdot \overline{P}^t = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

7.6 MATRICES SIMÉTRICAS

> Dados dos valores propios distintos de una misma matriz simétrica, le corresponden vectores propios ortogonales.

Si la matriz A es simétrica, en la diagonalización existen ciertas características:

1. Los autovalores son todos reales.
2. Verifican el teorema de caracterización de matrices diagonalizables.
3. La base de vectores propios es ortogonal.

7.6.1 Matriz ortogonal

Dividiendo cada vector de la base ortogonal por su módulo se obtiene una base ortonormal (ortonormalización). La matriz cuadrada que tiene por columnas (o filas) un sistema ortonormal se llama Matriz ortogonal y verifica:

$$A \text{ ortogonal} \Leftrightarrow A^t = A^{-1}$$

7.6.2 Diagonalización ortogonal

Toda matriz real y simétrica es ortogonalmente diagonalizable, es decir:

$$A \text{ simétrica} \Rightarrow \exists\, P \text{ ortogonal tal que } D = P^{-1} \cdot A \cdot P \text{ es diagonal}$$

De este teorema podemos deducir dos conclusiones triviales:

1. Si A es simétrica es congruente con una matriz diagonal. En efecto, como y como C es ortogonal es regular y, por tanto cumple la condición de congruencia.
2. Toda matriz simétrica es diagonalizable.

Ejemplo 7.4:

Sea la matriz: $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}\Rightarrow|A-l\cdot I|=\begin{vmatrix}2-l&0&1\\0&3-l&0\\1&0&2-l\end{vmatrix}=$

$$=(2-l)\cdot(6-3l-2l+l^2)+(-3+l)=(2-l)\cdot(l^2-5l+6)-3+l=$$

$$=2l^2-10l+12-l^3+5l^2-6l-3+l=-l^3+7l^2-15l+9=(l-3)^2\cdot(l-1)$$

cuyos autovalores son $l_1=3$ (doble) y $l_2=1$.

Para $l=3$

$$\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{matrix}-u_1+u_3=0\\u_1-u_3=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{matrix}u_1=d\\u_2=f\\u_3=d\end{matrix},\quad\forall d,f\in\mathrm{R}$$

Su conjunto de vectores será $L_3=\{(d,\ f,\ d),\ \forall d,f\in$ ú$\}$. Base de $L_3=\{(1,0,1),(0,1,0)\}$.

Los vectores elegidos tienen que ser ortogonales: $(1,0,1)\cdot(0,1,0)=1\cdot0+0\cdot1+1\cdot0=0$.

l_1 es un autovalor simple al coincidir la dimensión de L_3 con el número de raíces de l_1.

Para $l=1$

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{matrix}u_1+u_3=0\\2u_2=0\\u_1+u_3=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{matrix}u_1=y\\u_2=0\\u_3=-y\end{matrix},\quad\forall y\in\mathrm{R}$$

Su conjunto de vectores será $L_1=(y,\ 0,\ -y),\ \forall y\in$ ú$\}$. Base de $L_1=(1,0,-1)$. l_2 es un autovalor simple al coincidir la dimensión de L_1 con el número de raíces de l_2.

No sería necesario comprobar la ortogonalidad de este vector con los otros vectores calculados puesto que se deberá dar por el teorema anterior:

$$(1,0,1)\cdot(1,0,-1)=1\cdot1+0\cdot0+1\cdot(-1)=0\ \ (0,1,0)\cdot(1,0,-1)=0\cdot1+1\cdot0+0\cdot(-1)=0$$

Pasemos a ortonormales los tres vectores calculados

$$\vec{v_1}=(1,0,1)\quad,\quad\vec{v_2}=(0,1,0)\quad,\quad\vec{v_3}=(1,0,-1)$$

cuyos módulos serán:

$$\left|\vec{v_1}\right|=\sqrt{2}\quad,\quad\left|\vec{v_2}\right|=1\quad,\quad\left|\vec{v_3}\right|=\sqrt{2}$$

lo que resultará:

$$\vec{u_1}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\quad,\quad\vec{u_2}=(0,1,0)\quad,\quad\vec{u_3}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$$

y, por tanto

$$C=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}\\0&1&0\\1/\sqrt{2}&0&-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}=C^t$$

y se verifica que:

$$\Lambda = C^t \cdot A \cdot C = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \Lambda$$

y también:

$$A = C^t \cdot \Lambda \cdot C = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A$$

8. FORMAS BILINEALES Y CUADRÁ TICAS

8.1 FORMAS BILINEALES

Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo K.

Una forma bilineal sobre V es una aplicación $f: V\times V\to K$, tal que:

1. $f(a\cdot\vec{u_1}+b\cdot\vec{u_2},\vec{v})=a\cdot f(\vec{u_1},\vec{v})+b\cdot f(\vec{u_2},\vec{v})$.
2. $f(\vec{u},a\cdot\vec{v_1}+b\cdot\vec{v_2})=a\cdot f(\vec{u},\vec{v_1})+b\cdot f(\vec{u},\vec{v_2})$.

- Si el cuerpo $K=$ ú (reales), la forma bilineal se dice real.
- Una forma bilineal se dice simétrica si $f(\vec{u},\vec{v})=f(\vec{v},\vec{u}),\quad \forall\vec{u},\vec{v}$.
- Una forma bilineal se dice alternada o antisimétrica si $f(\vec{u},\vec{u})=0,\quad \forall\vec{u}$.

[Esta definición es equivalente a: $f(\vec{u},\vec{v})=-f(\vec{v},\vec{u}),\quad \forall\vec{u},\vec{v}$.]

Se verifica que para todo $\vec{v_1}\in V_1$ y $\vec{v_2}\in V_2$,

$$f(\vec{0},\vec{v_2})=f(\vec{v_1},\vec{0})=0$$

Consideremos que $V_1=V_2=V$ y $f: V\times V\to K$ una forma bilineal, diremos que

f es degenerada por la izquierda si existe un vector $\vec{v}\in V$, con $\vec{v}\neq\vec{0}$, tal que para todo $\vec{u}\in V$, se verifica:

$$f(\vec{v},\vec{u})=0$$

f es degenerada por la derecha si existe un vector $\vec{u}\in V$, con $\vec{u}\neq\vec{0}$, tal que para todo $\vec{v}\in V$, se verifica:

$$f(\vec{v},\vec{u})=0$$

Diremos que f es degenerada cuando lo es por la derecha y por la izquierda.

Por el contrario si f no es degenerada, entonces es regular.

8.1.1 Matriz asociada a una Forma Bilineal

Sea $f: V\times V\to$ ú una forma bilineal sobre V de dimensión n, y sea $B=\{\vec{e_1},\vec{e_2},\ldots,\vec{e_n}\}$ una base de V.

Si $\vec{u}=(x_1,\ldots,x_n)$, $\vec{v}=(y_1,\ldots,y_n)$ son las coordenadas de ambos vectores en la base B, la imagen $f(\vec{u},\vec{v})$ puede expresarse:

$$f(\vec{u},\vec{v})=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\cdot\begin{pmatrix} f(\vec{e_1},\vec{e_1}) & f(\vec{e_1},\vec{e_2}) & \cdots & f(\vec{e_1},\vec{e_n}) \\ f(\vec{e_2},\vec{e_1}) & f(\vec{e_2},\vec{e_2}) & \cdots & f(\vec{e_2},\vec{e_n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f(\vec{e_n},\vec{e_1}) & \cdots & \cdots & f(\vec{e_n},\vec{e_n}) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=X^t\cdot A\cdot Y$$

donde:

X^t es la matriz fila de las coordenadas de X en B.

Y es la matriz columna de las coordenadas de Y en B.

A es la matriz asociada a f en la base B. Cada a_{ij} de A en la base B verifica

$$a_{ij}=f(\vec{e_i},\vec{e_j});\quad i,j=1,2,\ldots,n$$

Ejemplo 8.1:

$$f(\vec{u},\vec{v}) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_1y_3 + 3x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 + 4x_3y_3$$

Su expresión analítica es:

$$f(\vec{u},\vec{v}) = (x_1, x_2, x_3)\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = X^t\cdot A\cdot Y$$

Como puede observarse *f* es simétrica, al serlo su matriz asociada, ya que

Si *A* es simétrica, *f* es simétrica
Si *A* es antisimétrica, *f* es alternada

8.1.2 CAMBIO DE BASE EN UNA FORMA BILINEAL

Sea $f: V\times V\to \mathbb{R}$ una forma bilineal y $B=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n\}; B'=\{\vec{e'}_1,\vec{e'}_2,\ldots,\vec{e'}_n\}$ dos bases de *V*, tales que:

$$\vec{e'}_1 = a_{11}\cdot\vec{e}_1 + a_{12}\cdot\vec{e}_2 + \ldots + a_{1n}\cdot\vec{e}_n = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}) \text{ en } B$$
$$\vdots$$
$$\vec{e'}_n = a_{n1}\cdot\vec{e}_1 + a_{n2}\cdot\vec{e}_2 + \ldots + a_{nn}\cdot\vec{e}_n = (a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn}) \text{ en } B$$

Si *A* y *A'* son las matrices de *f* en las bases *B* y *B'*, respectivamente, se verifica:

$$A' = P^t\cdot A\cdot P$$

Donde *P* es la matriz que tiene por columnas las coordenadas de los vectores de *B'* expresadas en *B*. Es decir:

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

8.1.3 Matrices congruentes

Las matrices cuadradas *A* y *B* del mismo orden se dicen congruentes si existe una matriz regular *P* tal que:

$$A = P^t\cdot B\cdot P$$

Es evidente que las matrices *A* y *A'* de una forma bilineal sobre dos bases diferentes, son congruentes.

Ejemplo 8.2:

Se considera la aplicación bilineal $f: \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por:

$$f((x_1, x_2),(y_1, y_2)) = x_1y_1 + 2x_2y_1 + x_2y_2$$
$$B=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}=\{(1,0),(1,1)\} \quad \text{y} \quad B'=\{\vec{e'}_1,\vec{e'}_2\}=\{(1,-1),(2,0)\}$$

Las imágenes de la base *B* serán:

$$f(\vec{e}_1,\vec{e}_1) = f((1,0),(1,0)) = 1+0+0=1 \quad ; \quad f(\vec{e}_1,\vec{e}_2) = f((1,0),(1,1)) = 1+0+0=1$$
$$f(\vec{e}_2,\vec{e}_1) = f((1,1),(1,0)) = 1+2+0=3 \quad ; \quad f(\vec{e}_2,\vec{e}_2) = f((1,1),(1,1)) = 1+2+1=4$$

Y las imágenes de la base *B'* serán:

$$f(\vec{e'}_1,\vec{e'}_1) = f((1,-1),(1,-1)) = 1-2+1=0 \quad ; \quad f(\vec{e'}_1,\vec{e'}_2) = f((1,-1),(2,0)) = 2-4+0=-2$$
$$f(\vec{e'}_2,\vec{e'}_1) = f((2,0),(1,-1)) = 2+0+0=2 \quad ; \quad f(\vec{e'}_2,\vec{e'}_2) = f((2,0),(2,0)) = 4+0+0=4$$

Por tanto, las matrices de *f* en las bases *B* y *B* ' serán:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix} \qquad A'=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$$

Las matrices *A* y *A* ' son congruentes.

La matriz *P* tiene como columnas los vectores de *B* ' expresados en la base *B*:

$$\overrightarrow{e'_1}=(1,-1)=2\cdot(1,0)+(-1)\cdot(1,1)\Rightarrow \overrightarrow{e'_1}=(2,-1)\text{ en }B$$
$$\overrightarrow{e'_2}=(2,0)=2\cdot(1,0)+0\cdot(1,1)\Rightarrow \overrightarrow{e'_2}=(2,0)\text{ en }B$$

Por tanto, la matriz de paso *P* es,

$$P=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

Podemos comprobar que se verifica,

$$P^t\cdot A\cdot P=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 4\end{pmatrix}=A'$$

8.1.4 VECTORES CONJUGADOS RESPECTO A UNA FORMA BILINEAL SIMÉTRICA. NÚCLEO

Dos vectores $\vec{u},\vec{v}$ son conjugados respecto una forma bilineal simétrica *f*, si:

$$f(\vec{u},\vec{v})=0$$

Un vector $\vec{u}$ es conjugado con un subespacio *S* respecto de *f* si lo es con todos los vectores de *S*.

Se llama núcleo de una forma bilineal simétrica *f*: $V\times V\to$ ú, el conjunto de vectores de *V* conjugados con todos los de *V*.

$$N(f)=\{\ \vec{u}\in V \text{ tal que } f(\vec{u},\vec{v})=0\ ;\ \forall\vec{v}\in V\ \}$$

Una forma bilineal simétrica se dice degenerada si $N(f)=0$, es decir, cuando:

$$\text{rg}(A)<n\ (n=\dim(V))$$

8.2 FORMAS CUADRÁTICAS

Sea *V* un espacio vectorial real y *f*: $V\times V\to$ ú una forma bilineal sobre *V*.

> Se llama forma cuadrática asociada a *f*, a la aplicación *q*: *V* ® ú definida por
>
> $$q(\vec{u})=f(\vec{u},\vec{u}),\quad \forall\vec{u}\in V$$

8.2.1 FORMA POLAR ASOCIADA A UNA FORMA CUADRÁTICA

Existe una sola forma cuadrática asociada a una forma bilineal dada. El recíproco no es cierto.

Existen diferentes formas bilineales asociadas a una forma cuadrática. De todas ellas sólo una es simétrica y se llama forma polar de la forma cuadrática.

Así, si *q*: *V* ® ú es una forma cuadrática, su forma polar está definida por:

$$f\text{: }V\times V\to\text{ú tal que } f(\vec{u},\vec{v})=\frac{1}{2}\cdot\left[q(\vec{u}+\vec{v})-q(\vec{u})-q(\vec{v})\right]$$

8.2.2 EXPRESIÓN MATRICIAL DE UNA FORMA CUADRÁTICA

Se define la matriz de una forma cuadrática a la matriz de su forma polar asociada:

$$q(\vec{u}) = f(\vec{u},\vec{u}) = X^t \cdot A \cdot X$$

Esta matriz será, por tanto, simétrica.

Ejemplo 8.3:

Se considera la forma cuadrática sobre $\mathbb{R}^2$:

$$q(\vec{u}) = 2x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_2^2$$

donde $\vec{u} = (x_1, x_2)$ en una base $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$.

La forma bilineal simétrica asociada a q (forma polar) es f: $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida para $\vec{u} = (x_1, x_2)$ y $\vec{v} = (y_1, y_2)$

$$f(\vec{u},\vec{v}) = \frac{1}{2} \cdot \left[q(\vec{u}+\vec{v}) - q(\vec{u}) - q(\vec{v}) \right]$$

$$q(\vec{u}+\vec{v}) = 2 \cdot (x_1+y_1)^2 - 3 \cdot (x_1+y_1) \cdot (x_2+y_2) + 4 \cdot (x_2+y_2)^2$$

$$q(\vec{u}) = 2x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_2^2$$

$$q(\vec{v}) = 2y_1^2 - 3y_1y_2 + 4y_2^2$$

Simplificando:

$$f(\vec{u},\vec{v}) = \frac{1}{2} \cdot \left[4x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 8x_2y_2 \right] = 2x_1y_1 - \frac{3}{2}x_1y_2 - \frac{3}{2}x_2y_1 + 4x_2y_2$$

Por lo tanto,

$$f(\vec{u},\vec{v}) = (x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3/2 \\ -3/2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = X^t \cdot A \cdot Y$$

Si nos fijamos un poco veremos que la expresión analítica anterior se puede deducir fácilmente:

$$q(\vec{u}) = 2x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_2^2$$

$2x_1^2 = 2x_1x_1$ el valor 2 en la posición $_{11}$ de la matriz.

$-3x_1x_2$ el valor –3 repartido entre las posiciones $_{12}$ y $_{21}$ de la matriz, o sea en cada uno.

$4x_2^2 = 4x_2x_2$ el valor 4 en la posición $_{22}$ de la matriz.

8.2.3 PROPIEDADES DE LAS FORMAS CUADRÁTICAS

Si q: $V \to \mathbb{R}$ es la forma cuadrática asociada a f: $V \times V \to \mathbb{R}$:

a) $q(l \cdot \vec{u}) = f(l \cdot \vec{u}, l \cdot \vec{u}) = l^2 \cdot f(\vec{u},\vec{u}) = l^2 \cdot q(\vec{u})$

b) $q(\vec{0}) = 0$

c) $q(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}+\vec{v}, \vec{u}+\vec{v}) = q(\vec{u}) + q(\vec{v}) + f(\vec{u},\vec{v}) + f(\vec{v},\vec{u})$

8.2.4 FORMAS CUADRÁTICAS DEFINIDAS

En toda forma cuadrática $q(\vec{0}) = 0$. Ahora bien, podría haber otros vectores $\vec{u} \in V$ tales que $q(\vec{u}) = 0$.

Una forma cuadrática, q: $V \to \mathbb{R}$ se dice definida si

$$Q \text{ es definida} \Leftrightarrow \left[q(\vec{u}) = 0 \Rightarrow \vec{u} = \vec{0} \right]$$

8.2.5 CAMBIO DE BASE EN UNA FORMA CUADRÁTICA

Si $q(\vec{u}) = X^t \cdot A \cdot X$ es la expresión de una forma cuadrática en una base *B*, y es *P* la matriz que expresa en columnas las coordenadas de los vectores de una nueva base *B* 'en *B*, la expresión de *q* en *B* 'será:

$$\boxed{q(\vec{u}) = X^t \cdot A' \cdot X \quad \text{siendo } A' = P^t \cdot A \cdot P}$$

Las dos matrices *A* y *A* 'son, por tanto, congruentes.

Por tanto, dos matrices cuadradas del mismo orden son congruentes si lo son de una misma forma cuadrática en dos bases distintas.

Ejemplo 8.4:

A partir del ejemplo (*8.3*) vamos a buscar la expresión de *q* en la base $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$, siendo $\vec{v_1} = (1,-1)$ y $\vec{v_2} = (1,2)$ en la primera base.

Siendo $\vec{u} = (x'_1, x'_2)$, las coordenadas en la nueva base, la expresión de *q* es ahora:

$$q = (x'_1, x'_2) \cdot A' \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} \text{ donde } A' = P^t \cdot A \cdot P$$

siendo *P* la matriz que expresa, en columnas, las coordenadas de los vectores de la nueva base en la antigua:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3/2 \\ -3/2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 & -11/2 \\ -1 & 13/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -15/2 \\ -15/2 & 12 \end{pmatrix}$$

La expresión de *q* será:

$$q(\vec{u}) = 9x'^2_1 - 15x'_1 x'_2 + 12x'^2_2$$

8.2.6 DIAGONALIZACIÓN DE UNA FORMA CUADRÁTICA

Diagonalizar una forma cuadrática consiste en encontrar una base respecto a la cual la matriz sea diagonal. Su expresión, en esa nueva base, quedará reducida a una suma de cuadrados:

$$q(\vec{u}) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2$$

Proposición: en toda forma cuadrática *q*: $V \to \mathbb{R}$ existe alguna base de *V* donde la matriz asociada a *q* es diagonal.

Ejemplo 8.5:

Diagonalizar la forma cuadrática definida sobre $\mathbb{R}^3$:

$$q(x, y, z) = 3x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz - 2yz$$

Matriz de *q*:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Autovalores de *A*:

$$|A - \lambda \cdot I| = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)\cdot\left[(5-\lambda)\cdot(3-\lambda)-1\right]+(-3+\lambda+1)+\left[1-(5-\lambda)\right]=0$$

$$(3-\lambda)\cdot(15-3\lambda-5\lambda+\lambda^2-1)-2+\lambda+(1-5+\lambda)=0$$

$$(3-\lambda)\cdot(14-8\lambda+\lambda^2)-2+\lambda+1-5+\lambda=0$$

$$42-24\lambda+3\lambda^2-14\lambda+8\lambda^2-\lambda^3-6+2\lambda=0$$

$$-\lambda^3+11\lambda^2-36\lambda+36=0$$

cuyos autovalores son $\lambda_1=2,\ \lambda_2=3$ y $\lambda_3=6$.

La matriz diagonal es:

$$D=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&6\end{pmatrix}$$

y la expresión reducida de q es:

$$q(x,y,z)=2x^2+3y^2+6z^2$$

8.2.7 INVARIANTES. rango y signatura

Llamaremos invariantes de una forma cuadrática a aquellas propiedades de su matriz asociada que no dependen de la base considerada en el espacio vectorial.

El rango de una forma cuadrática es el rango de su matriz:

$$\text{rg}(q)=\text{rg}(A)$$

Signatura de una forma cuadrática q: $V\to\mathbb{R}$ se llama al par (p, m) donde p es el número de elementos positivos que posee la diagonal de la matriz asociada a q, y m los negativos. Se designa sg(q) y se verifica:

$$p+m=\text{rg}(q)$$

Teorema de Silvester: El número de elementos positivos que hay en la diagonal de cualquiera de las matrices diagonales asociadas a una forma cuadrática dada, es el mismo.

8.2.8 CLASIFICACIÓN DE LAS FORMAS CUADRÁTICAS

Sea q: $V\to\mathbb{R}$ forma cuadrática, donde $\dim(V)=n$. La forma cuadrática puede ser:

1. Definida positiva. Si $q(\vec{u})>0;\quad \forall\vec{u}\in V, \vec{u}\neq 0$.
2. Definida negativa. Si $q(\vec{u})<0;\quad \forall\vec{u}\in V, \vec{u}\neq 0$.
3. Semidefinida positiva. Si $q(\vec{u})\geq 0;\quad \forall\vec{u}\in V$ y $\exists\vec{u}\neq 0$ tal que $q(\vec{u})=0$.
4. Semidefinida negativa. Si $q(\vec{u})\leq 0;\quad \forall\vec{u}\in V$ y $\exists\vec{u}\neq 0$ tal que $q(\vec{u})=0$.
5. Indefinida. Si $\exists\vec{u_1},\vec{u_2}\in V$ tal que $q(\vec{u_1})>0;\ q(\vec{u_2})<0$.

Una forma cuadrática puede clasificarse haciendo uso de su diagonalización y recordando que tanto el rango como la signatura son invariantes. Así:

1. Definida positiva:

$$\mathrm{sg}(q) = (n,0);\ \mathrm{rg}(q) = n$$

   o bien, cuando todos los autovalores son positivos.

2. Definida negativa:

$$\mathrm{sg}(q) = (0,n);\ \mathrm{rg}(q) = n$$

   o bien, cuando todos los autovalores son negativos.

3. Semidefinida positiva:

$$\mathrm{sg}(q) = (r,0);\ \mathrm{rg}(q) = r < n$$

   Los autovalores son mayores que cero, con alguno de ellos cero.

4. Semidefinida negativa:

$$\mathrm{sg}(q) = (0,r);\ \mathrm{rg}(q) = r < n$$

   Los autovalores son negativos, con alguno de ellos cero.

5. Indefinida: Restantes casos. Los autovalores son positivos y negativos.

9. EL ESPACIO AFÍN

Se dice que E es un espacio afín asociado a V si se define una aplicación $E\times E\to V$ tal que a cada par de puntos $P,Q\in E$ le haga corresponder un vector $\vec{v}\in V$ que se le denominará $\vec{v}=\overline{PQ}$ (es decir $f(P,Q)=\vec{v}=\overline{PQ}$), y verificará:

1. $\forall P\in E, \forall \vec{v}\in V; \exists Q\in E \,/\, f(P,Q)=\vec{v}=\overline{PQ}$
2. $f(P,Q)=0\Rightarrow P=Q$
3. $\forall P,Q,R\in E \,/\, \overline{PR}=\overline{PQ}+\overline{QR}\Rightarrow f(P,R)=f(P,Q)+f(Q,R)$

- REFERENCIA AFÍN: Es el conjunto $R=\{0,\vec{u_1},\vec{u_2},\ldots,\vec{u_n}\}$ donde u_1, u_2, …, u_n es una base de V.
- SUBESPACIO AFÍN: Cualquier subconjunto de un espacio afín con estructura de espacio afín.
- ECUACIONES DE UNA RECTA EN EL PLANO: si el punto es $P=(a,b)$ y el vector director es $\bar{d}=(d_1,d_2)$:

  -- Ecuación Vectorial $\to (x,y)=\overline{OP}+a\cdot\bar{d}$

  -- Ecuaciones Paramétricas $\to \left.\begin{array}{l} x=a+a\cdot d_1 \\ y=b+a\cdot d_2 \end{array}\right]$

  -- Ecuación Continua: igualando a través de $a\to \dfrac{x-a}{d_1}=\dfrac{y-b}{d_2}$

  -- Ecuación Cartesiana o Implícita: a partir de la anterior

  $d_2\cdot(x-a)=d_1\cdot(y-b)\Rightarrow d_2\cdot x-d_2\cdot a-d_1\cdot y+d_1\cdot b=0\Rightarrow d_2\cdot x-d_1\cdot y+d_1\cdot b-d_2\cdot a=0\Rightarrow$

  $\Rightarrow A\cdot x+B\cdot y+C=0$ donde $A=d_2$, $B=d_1$ y $C=d_1\cdot b-d_2\cdot a$.
- ECUACIONES DE UNA RECTA EN EL ESPACIO: si el punto es $P=(a,b,c)$ y el vector director es $\bar{d}=(d_1,d_2,d_3)$:

  -- Ecuación Vectorial $\to (x,y,z)=\overline{OP}+a\cdot\bar{d}$

  -- Ecuaciones Paramétricas $\to \left.\begin{array}{l} x=a+a\cdot d_1 \\ y=b+a\cdot d_2 \\ z=c+a\cdot d_3 \end{array}\right]$

  -- Ecuación Continua: igualando a través de $a\to \dfrac{x-a}{d_1}=\dfrac{y-b}{d_2}=\dfrac{z-c}{d_3}$

  -- Ecuación Cartesiana o Implícita: a partir de la anterior $\to \left.\begin{array}{l} A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D=0 \\ A'\cdot x+B'\cdot y+C'\cdot z+D'=0 \end{array}\right]$
- POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS (r y s) EN E_2:

  -- Paralelas $\to \overline{d_r}=a\cdot\overline{d_s}$

  -- Coincidentes $\to \overline{d_r}=a\cdot\overline{d_s}$ y $\forall P\in s\Rightarrow P\in r$

  -- Se cortan $\to \overline{d_r}\neq a\cdot\overline{d_s}$
- HAZ DE RECTAS DE VÉRTICE P:

$$a\cdot(A\cdot x+B\cdot y+C)+b\cdot(A'\cdot x+B'\cdot y+C')=0 \quad \forall a,b\in \mathbb{R}$$

- ECUACIONES DE UN PLANO: Puede determinarse por:
  - 1 punto $P=(a,b,c)$ y 2 vectores contenidos $\bar{u}$ y $\bar{v}$.

    -- Ecuación Vectorial $\rightarrow (x,y,z)=P+a\cdot\bar{u}+b\cdot\bar{v}$

    -- Ecuaciones Paramétricas $\rightarrow \left.\begin{array}{l} x=a+a\cdot u_1+b\cdot v_1 \\ y=b+a\cdot u_2+b\cdot v_2 \\ z=c+a\cdot u_3+b\cdot v_3 \end{array}\right]$

    -- Ecuación Cartesiana $\rightarrow \begin{vmatrix} x-a & u_1 & v_1 \\ y-b & u_2 & v_2 \\ z-c & u_3 & v_3 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D=0$
  - 3 puntos no alineados P_1, P_2 y $P_3 \rightarrow$ Será el plano que tiene como vectores, por ejemplo, P_1P_2 y P_1P_3 y contiene a uno cualquier de los tres.
  - 1 punto y un vector perpendicular $\bar{d}=(A,B,C)$:

$$A\cdot(x-a)+B\cdot(y-b)+C\cdot(z-c)=0$$

- POSICIONES RELATIVAS DE DOS PLANOS: Sean dos planos $p_1=A_1\cdot x+B_1\cdot y+C_1\cdot z+D_1=0$ y $p_2=A_2\cdot x+B_2\cdot y+C_2\cdot z+D_2=0$

  Analizando el sistema: $(M\vdots N)=\left(\begin{array}{ccc|c} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{array}\right)$

  -- Planos Coincidentes $\rightarrow \text{rg}(M)=\text{rg}(M\vdots N)=1$

  -- Planos Paralelos $\rightarrow \text{rg}(M)=1$ y $\text{rg}(M\vdots N)=2$

  -- Se cortan según una recta $\rightarrow \text{rg}(M)=\text{rg}(M\vdots N)=2$

- HAZ PROPIO DE PLANOS DE EJE LA RECTA r:

$$a\cdot(A_1\cdot x+B_1\cdot y+C_1\cdot z+D_1)+b\cdot(A_2\cdot x+B_2\cdot y+C_2\cdot z+D_2)=0 \qquad \forall a,b\in \text{ú}$$

- HAZ IMPROPIO DE PLANOS PARALELOS A UNO DADO: Dado $p = A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D=0$ serán:

$$A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+a=0 \quad \forall a\in \text{ú}$$

- POSICIONES RELATIVAS DE TRES PLANOS:

  Analizando el sistema: $(M\vdots N)=\left(\begin{array}{ccc|c} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{array}\right)$

  -- Planos Coincidentes $\rightarrow \text{rg}(M)=\text{rg}(M\vdots N)=1$

  -- Planos Paralelos o 2 coincidentes y 1 paralelo $\rightarrow \text{rg}(M)=1$ y $\text{rg}(M\vdots N)=2$

  -- Forman un Haz Propio $\rightarrow \text{rg}(M)=\text{rg}(M\vdots N)=2$

  -- Se cortan dos a dos (forman prisma) $\rightarrow \text{rg}(M)=2$ y $\text{rg}(M\vdots N)=3$

  -- Se cortan en un solo punto (forman vértice) $\rightarrow \text{rg}(M)=\text{rg}(M\vdots N)=3$